Rechenmethoden der Physik II, Hausübung 4

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **Abgabe: Dienstag, 06.05.2008**

[H10] *Im Anzeiger-Hochhaus-Kino* **(2 Punkte)**

Abends im Anzeiger-Kino in der Kuppel (Skizze!)

$$V = \{(x, y, z)|z + x^2 + y^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

sitzend spüren wir einen Wärmestrom

$$\vec{\jmath}(\vec{x}) = \alpha(x^3 \sin(z)\vec{e}_1 + x\tan(z)\vec{e}_2 + 3x^2\cos(z)\vec{e}_3)$$

durch das Kino fahren. Wie groß ist der Verlust durch die Decke?

[H11] *Spiel und Spannung mit Stokes* **(2 + 1,5 + 0,5 = 4 Punkte)**

(a) Zunächst eine kleine Fingerübung. Eine Fläche $z(x, y) = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \leq a^2$ werde vom Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{r}) = (z, x, y)$ durchsetzt. Stokes möchte hieran verifiziert werden.

(b) Eine Hochspannungsleitung verlaufe idealisiert in x-Richtung und werde von einer konstanten Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{x})$ (Strom / Leiterquerschnitt) in nur einem Kabel durchflossen. Das induzierte Magnetfeld um das Kabel errechnet sich mit der vierten Maxwellgleichung (bald lernen wir sie alle kennen!)

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{\jmath}(\vec{x})$$

per Stokes. Per geeignetem Ansatz für das $\vec{B}$-Feld und $\int_F \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{\jmath} = ?$ (Dimension!) berechnen wir die Stärke B des äußeren Magnetfeldes in Abhängigkeit vom senkrechten Abstand von der Leitung. Stimmt die Dimension?

(c) Jetzt wird's ernst. I sei Volllast 1920 A und d die Entfernung von einem Haus. Ein dauerhaftes Feld von 3 μT erhöht das Leukämie-Risiko signifikant. Wie weit muss das Haus mindestens von der Leitung entfernt sein, damit das Leben nicht risikobehaftet ist?

[H12] *Aus der Gruft: Teilchen im Potential* **(1,5 + 0,5 + 2 = 4 Punkte)**

Ein Teilchen der Masse m befinde sich im Potential

$$V(x, y) = \frac{\kappa}{2}\left(-\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{x+2y} - \cos(3x + y) + \frac{1}{2}e^{-x-2y} - xy\right)$$

am Ursprung und werde leicht ausgelenkt.

(a) Die Taylorentwicklung bis einschließlich quadratischen Termen soll bestimmt werden. Wie lautet die Hessematrix Hess $V(x, y)$?

(b) Offensichtlich liegt ein lokales Extremum vor. Für ein Minimum muss das Potential an dieser Stelle konvex sein, d.h. die Hesse-Matrix ist positiv definit. Nach Hurwitz-Kriterium ist dieses der Fall, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0$ und $\det \mathrm{Hess}\, V > 0$. Prüfen! Der Bauch von Dackel Rex ist konvex.

(c) Jetzt können wir ruhigen Gewissens die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen aus den Bewegungsgleichungen berechnen. Ob wir's noch können?